

ENSINO MÉDIO

PROBLEMA COM A MATEMÁTICA? SOLUÇÃO...



Capítulo 10: Funções Elementares Transcendentais

Introdução

As funções transcendentais elementares incluem as seis funções trigonométricas e suas inversas, as seis funções hiperbólicas e suas inversas, a função exponencial e sua inversa e a função logarítmica.

Uma listagem destas funções é dada na próxima seção. Este capítulo fornece ferramentas para que se possa explorar o comportamento de uma função elementar $f(x)$ sobre transformações da forma $a f(bx + c) + d$, onde os parâmetros a , b , c e d são números reais.

As funções hiperbólicas satisfazem identidades paralelas àquelas satisfeitas pelas funções trigonométricas. Estas identidades podem ser exploradas com uma das ferramentas apresentadas neste capítulo. Além disso, são introduzidas ferramentas para a resolução de equações contendo funções exponenciais e logarítmicas e, ainda, uma ferramenta para a resolução de equações transcendentais mais gerais.

Índice de Termos

Os seguintes termos, neste capítulo, têm conexão com o Dicionário do Maple; para mais informações vá em [Dicionário Matemático](#).

amplitude

arco tangente

domínio

função

um-para-um

arco cossecante

hiperbólico

exponencial

hiperbólica

equação

arco cosseno	arco secante	função elementar	secante	quadrática
arco cotangente	arco seno	função	hiperbólica	número
arco cossecante	arco tangente	exponencial	seno	racional
hiperbólico	número complexo	exponenciar	hiperbólico	número real
arco seno	convergir	ponto flutuante	tangente	reflexão
hiperbólico	cossecante	cossecante	hiperbólica	secante
arco cotangente	cosseno	hiperbólico	função inversa	sequência
hiperbólico	cotangente	cosseno	número	seno
arco secante		hiperbólico	irracional	tangente
hiperbólico		cotangente	iteração	
arco seno		hiperbólico	ponto médio	
hiperbólico			logaritmo	
			natural	

As Funções Elementares Transcendentais

As 26 funções a seguir são, em geral, consideradas como *funções transcendentais elementares*.

Funções Trigonométricas		Funções Trigonométricas Inversas	
seno	$\sin(x)$	arcoseno	$\arcsin(x)$
cosseno	$\cos(x)$	arcocosseno	$\arccos(x)$
tangente	$\tan(x)$	arcotangente	$\arctan(x)$
cotangente	$\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$	arcocotangente	$\text{arccot}(x)$
secante	$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$	arcosecante	$\text{arcsec}(x)$
cosecante	$\csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}$	arcocosecante	$\text{arccsc}(x)$
A Função Exponencial: e^x			
O Logaritmo Natural: $\ln(x)$			
Funções Hiperbólicas		Funções Hiperbólicas Inversas com Equivalentes Logarítmicas	
seno hiperbólico	$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	seno hiperbólico inverso	$\text{arcsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

coseno hiperbólico o	$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	coseno hiperbólico inverso	$\operatorname{arccosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$	$x \geq 1$
tangente hiperbólica a	$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$	tangente hiperbólica inverso	$\operatorname{arctanh}(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$	$ x < 1$
cotangente hiperbólica a	$\coth(x) = \frac{1}{\tanh(x)}$	cotangente hiperbólica inversa	$\operatorname{arccoth}(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)$	$ x > 1$
secante hiperbólica a	$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)}$	secante hiperbólica inversa	$\operatorname{arcsech}(x) = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right)$	$0 < x < 1$
cossecante hiperbólica a	$\operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\sinh(x)}$	cossecante hiperbólica inversa	$\operatorname{arccsch}(x) = \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)$	$x \neq 0$

Problemas Típicos

- 10.1. Traçar o gráfico de $\sin(x)$ e $3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 5$ sobre o mesmo conjunto de eixos.
- 10.2. Definir o domínio sobre o qual $\cos(x)$ encontra-se invertida em relação à seção principal da função arco-cosseno.
- 10.3. Provar a identidade: $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.
- 10.4. Deduzir a fórmula $\operatorname{arcsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.
- 10.5. Resolver a equação $2e^{3x} = 5$ para x .
- 10.6. Resolver a equação $\ln(2x + 5) = 3$ para x .
- 10.7. Resolver a equação $\cos(x) = 2 - x$ para x .

Inicializações do Maple

Antes de acessar a versão do Maple para as soluções do problemas típicos apresentados acima, inicialize o Maple apertando o botão à direita.

Inic...

Soluções

Problema 10.1

10.1 - Solução Matemática

A curva mais baixa na Figura 10.1.1 é o gráfico de $\sin(x)$ e a curva mais acima é o gráfico de

$$g(x) = 3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 5$$

A amplitude de $\sin(x)$ é 1, enquanto a amplitude de $g(x)$ é 3.

A frequência angular de $\sin(x)$ é 1, porém a frequência angular de $g(x)$ é 2.

O ângulo de fase para $\sin(x)$ é 0, mas para $g(x)$ este é dado por $\frac{\pi}{4}$. A reta central para $\sin(x)$ é $y = 0$, mas para $g(x)$ esta é dada por $y = 5$.

O gráfico pode ser traçado a partir de tais informações, juntamente com o conhecimento de como traçar a função $\sin(x)$.

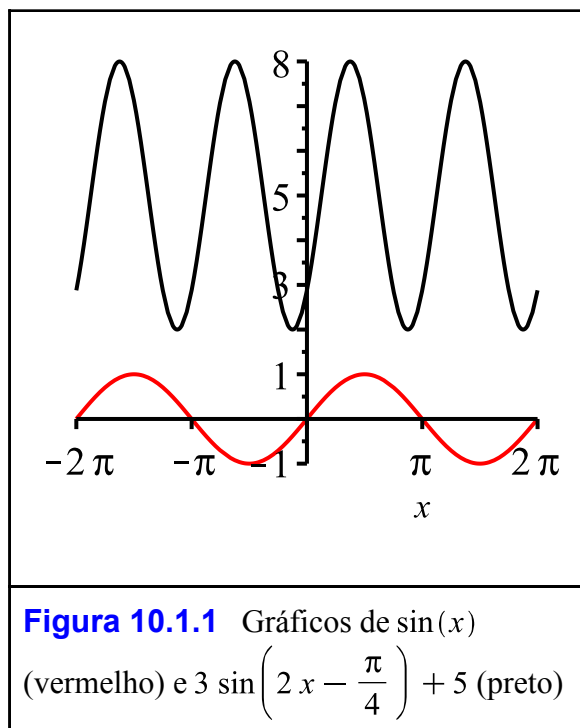


Figura 10.1.1 Gráficos de $\sin(x)$ (vermelho) e $3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 5$ (preto)

10.1 - Solução via Maplet

Um gráfico de $\sin(x)$ e $3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 5$ pode ser obtido com o [Tutorial Funções Transcendentais](#).

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 10.1.2.

O **Tutorial Funções Transcendentais** transforma uma **função elementar** $f(x)$ em $a f(bx + c) + d$. Neste

caso, tem-se $a = 3$, $b = 2$, $c = -\frac{\pi}{4}$ e $d = 5$, valores

inseridos interativamente nas janelas apropriadas. Ao clicar-se sobre o botão **Gráfico**, obtém-se o gráfico

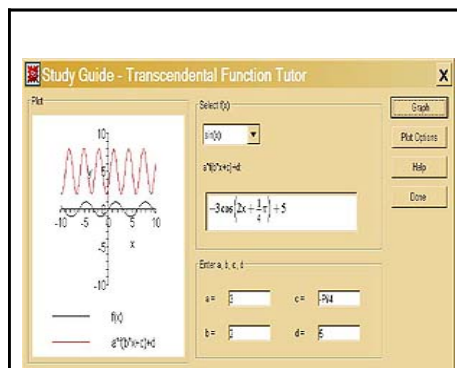


Figura 10.1.2 Imagem do Tutorial Funções Transcendentais

desejado.

Inesperadamente, o Maple explora a identidade trigonométrica

$$\cos\left(A + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(A) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(A) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(A)$$

Considerando-se $A = 2x - \frac{\pi}{4}$, obtém-se com o Maple

$$3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 5 = -3 \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 5$$

Para iniciar o **Tutorial Funções Transcendentais**, deve-se clicar sobre seguinte link: [Tutorial Funções Transcedentais](#).

▼ 10.1 - Solução Interativa

Reinicialize o Maple apertando o botão à direita. I...	
• Digite $f(x) = \sin(x)$ • Menu de Contexto: Associe Função	
• Digite $f(x)$, $3f(2x - \pi/4)$ e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Gráficos > Construtor de Gráficos $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ (Use 2*Pi para 2π) Opções: Padrões Globais & Ajustes Eixos > Avançado Ajustes > Tickmarks > x mude "default" para "spacing (Pi,0)" Aplicar	

▼ 10.1 - Solução via Comandos do Maple

Inserindo-se $f(x) = \sin(x)$ como uma função do Maple

> $f := x \rightarrow \sin(x) :$
 $'f(x) = f(x)$

obtém-se, na Figura 10.1.3, o gráfico desejado.

```
> plot([f(x), 3*f(2*x - pi/4) + 5], x = -2*pi .. 2*pi,
      color = [red, black], scaling = constrained,
      tickmarks = [spacing(pi), default])
```

Figura 10.1.3 Gráficos de $\sin(x)$ (vermelho) e $3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 5$ (preto)

A amplitude de $\sin(x)$ é 1, enquanto a amplitude de

$$\begin{aligned} g(x) &= a f(bx + c) + d \\ &= 3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 5 \end{aligned}$$

é 3.

A frequência angular de $\sin(x)$ é 1, porém a frequência angular de $g(x)$ é 2.

O ângulo de fase para $\sin(x)$ é 0, mas para $g(x)$ este é dado por $\frac{\pi}{4}$. A reta central para $\sin(x)$ é $y = 0$, mas para $g(x)$ esta é dada por $y = 5$.

Problema 10.2

10.2 - Solução Matemática

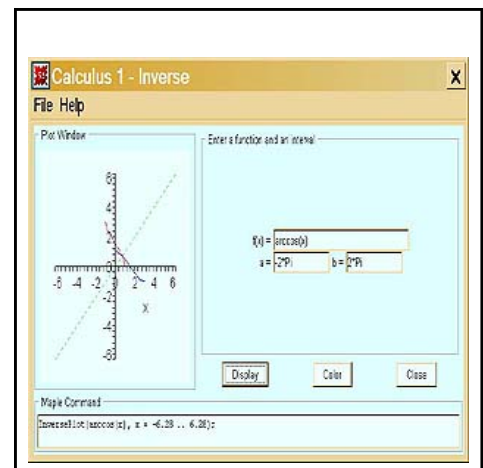
O domínio de $\cos(x)$ usado para definir a seção principal da função arco-cosseno é o intervalo $[0, \pi]$.

10.2 - Solução via Maplet

O domínio sobre o qual $\cos(x)$ encontra-se invertido em relação à seção principal da função arco-cosseno é o intervalo $[0, \pi]$.

Isto pode ser deduzido a partir do gráfico gerado pelo **Tutorial Inversas** do Maple que está no pacote Student Calculus 1.

A função inversa, ou seja, $\arccos(x)$, é inserida no tutorial e o botão **Exibir** gera um gráfico desta função em vermelho e de sua reflexão sobre $y = x$ em azul. A reflexão é um gráfico do funcional inverso de arccos



(x) , ou seja, de $\cos(x)$. Do gráfico azul, pode-se deduzir o domínio da parte de $\cos(x)$ que define uma função inversível um-para-um.

Figura 10.2.1 Imagem do Tutorial Inversas (Student Calculus 1)

O **Tutorial Inversas** do sub-pacote *Calculus 1* do pacote *Student* pode ser acessado pelo menu Ferramentas. Siga o caminho

Ferramentas>Tutores>Cálculo: Única Variável>Função Inversa

Alternativamente, este pode ser iniciado em uma folha de trabalho do Maple por meio do comando

`Student[Calculus1][InverseTutor]();`

Entretanto, a forma mais simples de iniciar os tutores é carregar o pacote apropriado do menu Ferramentas seguindo um caminho como Ferramentas>Carregar Pacote: Student Calculus 1. Então, do Menu de Contexto do item a ser trazido para o Tutorial, selecione Tutoriais e o Tutorial apropriado.

Pode, também, ser iniciado ao clicar-se sobre o link: [Tutorial Inversas](#).

10.2 - Solução Interativa

- Digite $[\arccos(x), x]$
- Menu de Contexto:
Gráficos>Construtor de Gráficos
 $-4 \leq x \leq 4$
Opções: Eixos>Ajustes Avançados
para eixo x , mude Tickmarks de
"default" para "spacing(Pi,0)" e mude
Pi para Pi/4

10.2 - Solução via Comandos do Maple

Para determinar o domínio sobre o qual $\cos(x)$ encontra-se invertido em relação à seção principal de $\arccos(x)$, deve-se refletir o gráfico de $\arccos(x)$ sobre a reta $y = x$. O gráfico resultante, na Figura 10.2.2, deverá conter a porção do gráfico de $\cos(x)$ procurada. A reflexão da inversa exhibe a função original, mas apenas a parte que pertence à função inversa.

```
> p1 := plot(arccos(x), x=-4..4) :
      display(reflect(p1, [[0, 0], [1, 1]]), scaling
              = constrained, tickmarks = [spacing(pi/2), default],
              view = [0..pi, -1..1], labels = [x, y])
```

Figura 10.2.2 A função inversa de $\cos(x)$ refletida na linha

$$y = x$$

Da figura 10.2.2, pode-se inferir que o domínio de $\cos(x)$ usado para definir a seção principal da [função arco-cosseno](#) é o intervalo $[0, \pi]$.

Problema 10.3

10.3 - Solução Matemática

A identidade

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

pode se provada convertendo-se cada [função hiperbólica](#) na sua forma exponencial equivalente. Portanto, escreve-se

$$\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

10.3 - Solução via Maplet

Uma verificação da identidade

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

pode ser obtida por meio do [Tutorial Identidades das Funções Hiperbólicas](#).

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 10.3.1.

Ao inserir a identidade, note que a notação do Maple para expressões como $\cosh^2 x$ é $\cosh(x)^2$.

Para substituir cada [função hiperbólica](#) por sua forma [exponencial](#) equivalente, deve-se pressionar o botão **Converter para a forma exponencial**.

Para simplificar a expressão resultante, deve-se pressionar o botão **Simplificar**.

Para determinar se os dois lados da equação resultante são iguais, deve-se pressionar o botão **Verificar**. Obviamente, para esta identidade o passo de simplificação resulta na identidade $1 = 1$, de forma que uma simples inspeção visual é suficiente.

Para iniciar o **Tutorial Identidades das Funções Hiperbólicas**, deve-se clicar sobre o seguinte link: [Tutorial Identidades de Funções Hiperbólicas](#)

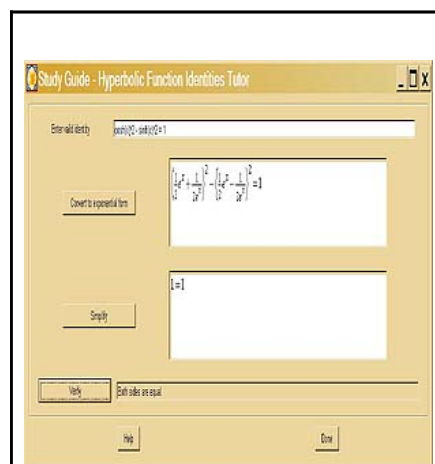


Figura 10.3.1 Imagem do Tutorial Identidades das Funções Hiperbólicas

10.3 - Solução Interativa

Escreva o lado esquerdo como
 $\cosh^2(x) - \sinh^2(x)$
 Menu de Contexto:
 Conversões > Exponencial

10.3 - Solução via Comandos do Maple

A identidade

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

pode ser provada convertendo-se cada função hiperbólica em sua forma exponencial equivalente. No Maple, são feitos os cálculos do lado esquerdo:

Insira o lado esquerdo. (Os parênteses são essenciais.)

$$> q := \cosh^2(x) - \sinh^2(x)$$

Converta para a forma exponencial.

$$> \text{convert}(q, \text{exp})$$

Problema 10.4

10.4 - Solução Matemática

Para deduzir a fórmula

$$\operatorname{arcsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

deve-se aplicar os três passos para o cálculo da inversa da função $f(x) = \sinh(x)$. Inicia-se com a equação

$$y = \sinh(x)$$

A fim de resolver a equação para x , deve-se converter a função hiperbólica em sua forma exponencial equivalente, obtendo-se

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Sabendo-se que $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, pode-se fazer a substituição $z = e^x$, de forma a obter-se

$$y = \frac{z}{2} - \frac{1}{2z}$$

ou

$$0 = z^2 - 2yz - 1$$

Usando-se a [fórmula quadrática](#) para resolver-se $z = e^x$, tem-se

$$z_1 = \frac{(-(-2y) + \sqrt{(-2y)^2 - 4(-1)}) \cdot 1}{2} = y + \sqrt{y^2 + 1}$$

$$z_2 = \frac{(-(-2y) - \sqrt{(-2y)^2 - 4(-1)}) \cdot 1}{2} = y - \sqrt{y^2 + 1}$$

Neste caso, $y = \sinh(x)$ significa que quando $x = 0$, $y = \sinh(0) = 0$. Se, contudo, $y = 0$, então a primeira solução, ou seja,

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$$

torna-se

$$e^0 = 1 = 0 + 1 = 1$$

Portanto, seleciona-se esta primeira solução e escreve-se

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$$

Finalmente, isolando-se x ao tomar-se o [logaritmo natural](#) de ambos os lados, resulta

$$x = \ln\left(y + (y^2 + 1)^{\frac{1}{2}}\right)$$

Invertendo-se as letras, obtém-se o resultado desejado, isto é,

$$y = \ln\left(x + (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}\right)$$

▼ 10.4 - Solução via Maplet

O [Tutorial Funções Hiperbólicas Inversas](#) guia o usuário na dedução da forma logarítmica de uma [função hiperbólica inversa](#), tal como $\operatorname{arcsinh}(x)$.

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será

iniciado como mostrado na Figura 10.4.1.

Deve-se selecionar $\operatorname{arcsinh}(x)$ na lista do tutorial, notando-se que este aparece na forma de uma equação $y = \operatorname{arcsinh}(x)$.

Em seguida, pressiona-se os botões à esquerda na Tabela 10.4.1. Os resultados são mostrados na caixa abaixo, à direita.

A escolha da solução correta para a equação quadrática em z requer algum raciocínio. Para a função $\operatorname{arcsinh}(x)$, as duas soluções são

$$z = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

Como x encontra-se no domínio de $\operatorname{arcsinh}(x)$, este pode ser tanto positivo como negativo. Porém, $z = e^y$ deve ser sempre positivo. A única maneira de garantir que z permaneça positivo é escolhendo-se a solução com o sinal positivo antes da raiz, pois, como o radical será sempre maior que x , a expressão poderá tornar-se negativa se a solução com o sinal de menos for escolhida.

Para iniciar o **Tutorial Funções Hiperbólicas Inversas**, deve-se clicar sobre o seguinte link: [Tutorial Funções Hiperbólicas Inversas](#).

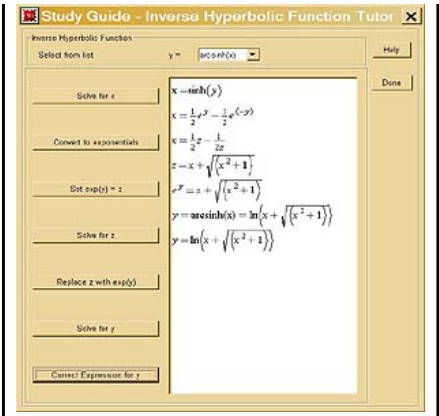


Figura 10.4.1 Imagem do Tutorial de Funções Hiperbólicas Inversas

Botão	Resultado
Resolva para x	$x = \sinh(y)$
Converter para exponenciais	$\sinh(y)$ trocado por $\frac{e^y - e^{-y}}{2}$
Faça $\exp(y) = z$	$e^{-y} = \frac{1}{z}$ e uma equação quadrática em z results
Resolva para z	Existem duas soluções para z. Selecione a correta.
Trocar z com $\exp(y)$	Restaura e^y
Resolva para y	Isole y
Expressão Correta para y	Gera a expressão logarítmica do Maple para a função inicial
Tabela 10.4.1 Ações dadas pelo Tutorial Funções Hiperbólicas Inversas	

▼ 10.4 - Solução Interativa

Solução Passo-a-Passo	
• Digite a equação para $y = \sinh(x)$ e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Conversões > Exponencial	
• Control-arraste a forma exponencial da equação. • Mude e^x para z, e e^{-x} para $\frac{1}{z}$. Pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Resolver > Obter Soluções para > z	
• Digite $e^x =$ e complete por Control-arrastando a solução apropriada. Pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Resolver > Isole Expressão para > x	
• Control-arraste, e mude x para y e y para x. • Pressione a tecla Enter.	
Conversão via Maple	
• Digite $\operatorname{arcsinh}(x)$ • Menu de Contexto: Aplicar um Comando converter ln	

▼ 10.4 - Solução via Comandos do Maple

Para deduzir a fórmula $\operatorname{arcsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ deve-se aplicar os três passos para o cálculo da inversa da função $f(x) = \sinh(x)$.	
Insire a equação $y = \sinh(x)$.	> $q := y = \sinh(x)$
Converter a função hiperbólica em sua forma exponencial equivalente	> $q1 := \operatorname{simplify}(\operatorname{convert}(q, \exp))$
Faça a substituições $z = e^x$ e $\frac{1}{z} = e^{-x}$.	> $q2 := \operatorname{eval}(q1, \{\exp(x) = z, \exp(-x) = 1/z\})$

Resolva para $z = e^x$.	> $q3 := solve(q2, z)$
Selecione a solução que satisfaz $(x, y) = (0, 0)$.	> $q4 := \exp(x) = q3[1]$
Resolva explicitamente para x .	> $q5 := isolate(q4, x)$
Troque as letras x e y .	> $y = eval(rhs(q5), y = x)$
Compare com a conversão feita pelo Maple para a forma log.	> $convert(arcsinh(x), \ln)$

▼ Problema 10.5

▼ 10.5 - Solução Matemática

A fim de resolver a equação

$$2 e^{3x} = 5$$

deve-se, inicialmente, isolar o termo exponencial da esquerda. Ou seja, divide-se ambos os lados por 2, obtendo-se

$$e^{3x} = \frac{5}{2}$$

Tomando-se o logaritmo natural de ambos os lados tem-se

$$\ln(e^{3x}) = \ln\left(\frac{5}{2}\right)$$

Para x real,

$$\ln(e^{3x}) = 3x \ln(e) = 3x$$

Portanto, tem-se, na verdade,

$$3x = \ln\left(\frac{5}{2}\right)$$

A divisão por 3 completa a solução, de forma que

$$x = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{5}{2}\right)$$

▼ 10.5 - Solução via Maplet

A equação $2e^{3x} = 5$ pode ser resolvida pelo [Tutorial Equações Transcendentais](#).

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 10.5.1.

A equação é inserida na forma $f(x) = 0$ e o botão **Gráfico de $f(x)$** gera um gráfico de $f(x)$, a expressão obtida quando a equação é reescrita ao isolar-se o valor zero no lado direito.

O botão **Resolver analiticamente** gera uma solução exata quando possível.

O botão **Resultados em ponto-flutuante** converte a solução exata na forma de [ponto flutuante](#) (decimal).

O botão **Resolver numericamente** gera uma solução numérica para a equação.

Para iniciar o **Tutorial Equações Transcendentais**, deve-se clicar sobre o link a seguir: [Tutorial Equações Transcendentais](#).

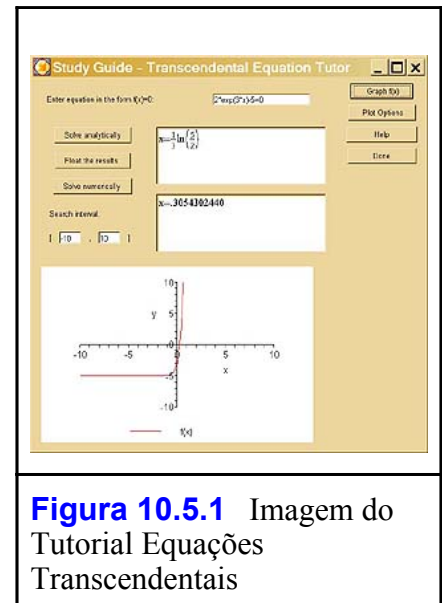


Figura 10.5.1 Imagem do Tutorial Equações Transcendentais

▼ 10.5 - Solução Interativa

Solução Imediata pelo Maple	
• Digite $2e^{3x} = 5$ e pressione a tecla Enter. Esteja certo de usar a exponencial e, não a letra e. • Menu de Contexto: Resolver > Resolver	
Solução Passo a Passo	
• Digite $2e^{3x} = 5$ e pressione a tecla Enter. Esteja certo de usar a exponencial e, não a letra e. • Menu de Contexto: Manipular Equação Multiplicar ambos os lados por $1/2$ Aplicar $\ln$ a ambos os lados Pressione Retornar Passos • Menu de Contexto: Simplificar > Assumindo Real • Menu de Contexto: Manipular Equação Multiplicar ambos os lados por $1/3$ Pressione Retornar	

▼ 10.5 - Solução via Comandos do Maple

A equação

$$> q := 2 \exp(3 x) = 5$$

é imediatamente resolvida para x através do comando

$$> solve(q, x)$$

Seguiremos alguns passos. Inicialmente, isola-se o termo exponencial da esquerda, ou seja, divide-se ambos os lados da equação por 2 a fim de obter-se

$$> q1 := q / 2$$

Tomando-se o logaritmo natural de ambos os lados da equação, tem-se

$$> map(\ln, q1)$$

Embora $\ln(x)$ e e^x sejam funções inversas para x real, o logaritmo natural de um número complexo é um conceito um pouco mais complicado. O Maple não faz a simplificação

$$\ln(e^{3x}) = 3x \ln(e) = 3x$$

a menos que saiba que x é real. Portanto, uma maneira de obter-se a simplificação desejada é

$$> q2 := map(\ln, q1) \text{ assuming } x :: \text{real}$$

A divisão por 3 completa a solução, tal que

$$> q2 / 3$$

é obtido.

▼ Problema 10.6

▼ 10.6 - Solução Matemática

Para resolver a equação

$$\ln(2x + 5) = 3$$

deve-se, inicialmente, exponenciar ambos os lados, a fim de obter-se

$$e^{\ln(2x+5)} = e^3$$

ou

$$2x + 5 = e^3$$

uma vez que a simplificação

$$e^{\ln(f(x))} = f(x)$$

é válida para qualquer x .

Resta resolver a equação para x . Para isto, subtrai-se 5 em cada lado da equação, de forma que

$$2x = e^3 - 5$$

Em seguida, divide-se a equação resultante por 2, tal que

$$x = \frac{e^3 - 5}{2}$$

10.6 - Solução via Maplet

A equação $\ln(2x + 5) = 3$ pode ser resolvida por meio do [Tutorial Equações Transcendentais](#).

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 10.6.1.

A equação é inserida na forma $f(x) = 0$ e o botão **Gráfico de $f(x)$** gera um gráfico de $f(x)$, a expressão obtida quando a equação é reescrita ao isolar-se o valor zero no lado direito.

O botão **Resolver analiticamente** gera uma solução exata quando possível.

O botão **Resultados em ponto-flutuante** converte a solução exata na forma de ponto flutuante (decimal).

O botão **Resolver numericamente** gera uma solução numérica para a equação.

Para iniciar o **Tutorial Equações Transcendentais**, deve-se clicar sobre o link a seguir: [Tutorial Equações Transcendentais](#).

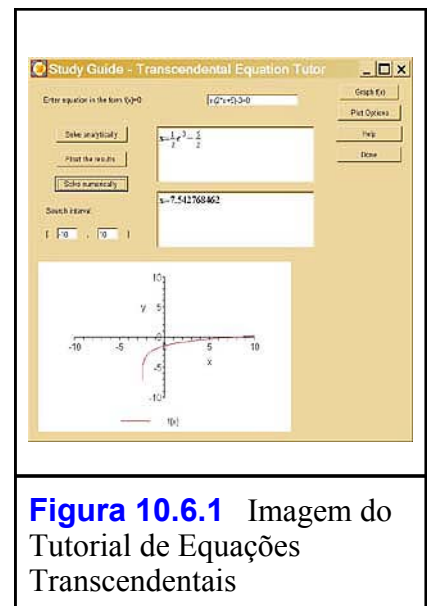


Figura 10.6.1 Imagem do Tutorial de Equações Transcendentais

▼ 10.6 - Solução Interativa

Solução Imediata pelo Maple	
• Digite $\ln(2x + 5) = 3$ e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Resolver > Resolver	
Solução Passo a Passo	
• Digite $\ln(2x + 5) = 3$ e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Manipular Equação - Aplicar exp a ambos os lados - Adicionar -5 a ambos os lados - Multiplicar ambos os lados por 1/2 - Pressionar Retornar	

▼ 10.6 - Solução via Comandos do Maple

A equação

$$> q := \ln(2x + 5) = 3$$

é imediatamente resolvida para x através do comando

$$> \text{solve}(q, x)$$

Seguiremos alguns passos. Inicialmente, deve-se exponenciar ambos os lados da equação, a fim de obter-se

$$> q1 := \text{map}(\exp, q)$$

Note que o Maple implementa a simplificação

$$e^{\ln(f(x))} = f(x)$$

imediatamente.

Resta ainda resolver a equação para x . Inicialmente, deve-se subtrair 5 em cada lado da equação

$$> q2 := q1 - (5 = 5)$$

Em seguida, divide-se a equação resultante por 2, obtendo-se

Problema 10.7

10.7 - Solução Matemática

A equação

$$\cos(x) = 2 - x$$

possui uma raiz real no intervalo $[2, 3]$, como pode ser vista pela Figura 10.7.1 onde $\cos(x)$ e $2 - x$ são desenhadas separadamente em preto e vermelho, respectivamente. Se a equação é rearranjada para

$$x = 2 - \cos(x)$$

será da forma

$$x = g(x)$$

onde

$$g(x) = 2 - \cos(x)$$

Se um chute inicial na raiz r é dada por x_0 , e uma nova aproximação para a raiz é dada por:

$$x_1 = g(x_0)$$

o primeiro passo foi feito em um processo iterativo que poderia convergir para a raiz r .

Em geral, sobre as condições certas em $g(x)$, a sequência

$$x_{k+1} = g(x_k), k = 0, 1, \dots$$

converge para uma raiz r .

Implementando esta estratégia com $x_0 = 2$, nós obtemos a sequência na Tabela 10.7.1. A sequência converge para a raiz r que está no intervalo $[2, 3]$.

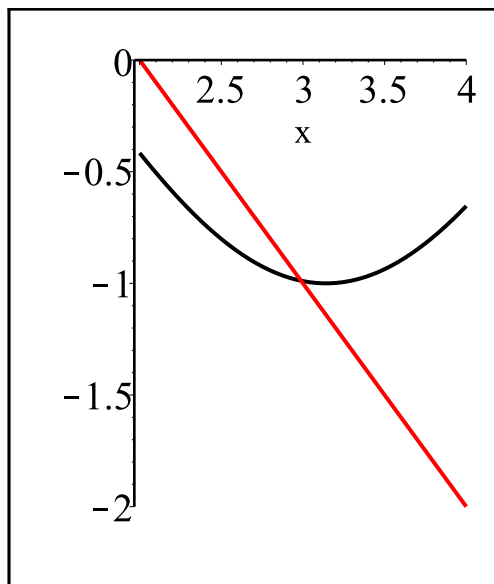


Figura 10.7.1 Lados esquerdo e direito da equação $\cos(x) = 2 - x$

x_1	$= 2.416146836$
x_2	$= 2.748203710$
x_3	$= 2.923615314$
x_4	$= 2.976336857$
x_5	$= 2.986376308$
x_6	$= 2.987978108$
x_7	$= 2.988224469$
x_8	$= 2.988262135$
x_9	$= 2.988267888$
x_{10}	$= 2.988268767$

Tabela 10.7.1 Iterações para $x = g(x)$

10.7 - Solução via Maplet

A equação $\cos(x) = 2 - x$ pode ser resolvida com o [Tutorial Equações Transcendentais](#).

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 10.7.2.

A equação é inserida na forma $f(x) = 0$ e o botão **Gráfico de $f(x)$** gera um gráfico de $f(x)$, a expressão obtida quando a equação é reescrita ao isolar-se o valor zero no lado direito.

O botão **Resolver analiticamente** gera uma solução exata quando possível.

O botão **Resultados em ponto-flutuante** converte a solução exata na forma de [ponto flutuante](#) (decimal).

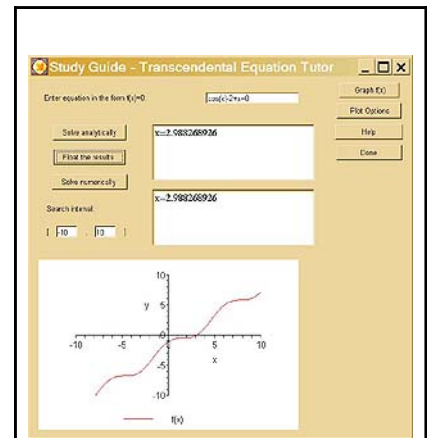


Figura 10.7.2 Imagem do Tutorial Equações Transcendentais

Para este problema, não existe uma solução analítica. Sendo assim, o Maple simplesmente reescreve a equação usando $_Z$ no lugar de x . Portanto, transformando o resultado na forma de ponto flutuante, obtém-se $x = 2.988268926$, essencialmente o mesmo valor encontrado por uma solução estritamente numérica.

O botão **Resolver numericamente** gera uma solução numérica para a equação.

Para iniciar o **Tutorial Equações Transcendentais**, deve-se clicar sobre o link a seguir: [Tutorial Equações Transcendentais](#).

▼ 10.7 - Solução Interativa

Solução Imediata pelo Maple	
• Digite $\cos(x) = 2 - x$ • Menu de Contexto: Resolver > Resolver Numericamente	
Solução Iterativa	
• Digite $g(x) = 2.0 - \cos(x)$ • Menu de Contexto: Associe Função	
• Digite $g(3.0)$ e pressione a tecla Enter.	
• Digite $g()$ e Control-arraste o valor de x_k entre os parênteses. Pressione a tecla Enter. • Repetir até os dígitos em x_k pararem de mudar.	

10.7 - Solução via Comandos do Maple

A raiz real da equação

> $q := \cos(x) = 2 - x$

não é um número racional. Na verdade, o comando do Maple gera a construção

> $r := \text{solve}(q, x)$

para a raiz. Contudo, se esta raiz for submetida ao comando evalf, obtém-se a aproximação numérica a seguir para a raiz:

> $\text{evalf}(r)$

Nem toda equação pode ser resolvida de forma exata, de maneira que o comando solve nem sempre retornará uma solução. Além disso, quando uma solução é retornada, esta não necessariamente se encontra em uma forma reconhecível.

Portanto, existe ao menos uma raiz real que pode ser calculada numericamente e, para tal, usa-se o comando fsolve implementado por

> $\text{fsolve}(q, x)$

Pode-se determinar quando existe apenas uma solução real escrevendo-se a equação na forma $f(x) = 0$, onde $f(x)$ é a função cuja regra é dada por

> $f := \text{lhs}(q) - \text{rhs}(q)$

Sendo assim, as raízes da equação original são os zeros da função $f(x)$, traçada na Figura 10.7.3.

> $\text{plot}(f, x = 2 .. 4)$

Figura 10.7.3 Gráfico de $f(x) = \cos(x) - 2 + x$

Existem diversos algoritmos que podem ser usados para obter-se uma solução numérica da equação $f(x) = 0$. Um dos mais simples é o *método da bisseção*. Se o sinal de $f(a)$ e $f(b)$ forem diferentes, então existe um zero de $f(x)$ no intervalo $[a, b]$. Uma aproximação deste zero é dada pelo ponto médio do intervalo, $c = \frac{a+b}{2}$. O zero encontra-se na parte do intervalo $[a, b]$ onde o sinal de $f(c)$ difere do sinal na extremidade do intervalo. Repetidas aplicações desta estratégia estreitam a fronteira do zero até que esta se encontre em um nível aceitável.

O primeiro passo para esta construção é ilustrado na Figura 10.7.4.

```

> m := (1 + 4) / 2 :
p1 := plot(f, x = 1 .. 4, color = black) :
p2 := arrow([m, 0], [m, eval(f, x = m)], 0.01, 0.05, 0.2, color = black) :
p3 := textplot([2.5, 0.1, typeset('m')]) :
p4 := textplot({[1.1, -0.6, typeset('f'(a) < 0)], [2.2, -0.5,
typeset('f'('m') < 0)], [3.4, 1.3, typeset('f'(b) > 0)]}, align
= RIGHT) :
display([p1, p2, p3, p4], labels = [x, "f"], labelfont = [TIMES, ITALIC, 12],
tickmarks = [5, 4])

```

Figura 10.7.4 Ilustração do método da bisseção para encontrar raízes

Tabela 10.7.2 lista os passos para o algoritmo da bisseção.

Passo	Comentário
1. Testar se $f(a)f(b) < 0$.	Isto verifica se a raiz encontra-se no intervalo $[a, b]$.
2. Obter $m = \frac{b + a}{2}$.	Este é o ponto médio do intervalo $[a, b]$.
3. Se $f(a)f(m) < 0$ então $b = m$. Retornar ao passo 2.	O Zero de $f(x)$ encontra-se entre as extremidades.
4. Se $f(a)f(m) > 0$ então $a = m$. Retornar ao passo 2.	O Zero de $f(x)$ encontra-se entre as extremidades.
5. Se $f(a)f(m) = 0$ então parar, pois m é uma raiz de $f(x) = 0$.	O Zero de $f(x)$ encontra-se no ponto médio.
Tabela 10.7.2 Passos no método da bisseção para encontrar as raízes	

Um procedimento bastante simples chamado **bis**, que implementa o algoritmo da bisseção, é dado abaixo. Este contém um teste para garantir que exista mudança de sinal no intervalo inicial. Em seguida, o intervalo é dividido um determinado número de vezes.

```

> bis := proc(f, a, b, n)
  local F, A, B, C, k, L, H;
  A := a;
  B := b;
  C := evalf((A + B) / 2);
  if type(f, procedure) then F := f else F := unapply(evalf(f), x); fi;
  L := [0, [A, B], C, F(C), B - A];
  if evalf(F(a) * F(b)) > 0 then ERROR('root not bracketed'); fi;

```

```

for  $k$  from 1 to  $n$  do
  if  $\text{evalf}(F(A) * F(C)) < 0$  then  $B := C$  else  $A := C$ ; fi;
   $C := \text{evalf}((A + B) / 2)$ ;
   $L := L, [k, [A, B], C, F(C), B - A]$ ;
od:
 $H := [ \text{'k' }, \text{'(alpha, beta)' }, \text{'m' }, f(m), \text{'abs(beta-alpha)' } ]$ :
 $\text{Matrix}([H, L])$ ;
end:

```

O comando a seguir garante que todos os resultados obtidos pelo comando **bis** sejam exibidos.

> *interface(rtablesize = infinity) :*

The **bis** command is invoked via

> *bis(f, 2, 4, 20)*

A primeira coluna representa o número de partições do intervalo, a segunda coluna representa o intervalo no qual encontra-se a raiz, a terceira é o ponto médio do intervalo dado na segunda coluna, a quarta é o valor da função, ou valor residual, no ponto médio e a quinta coluna representa o comprimento do intervalo na segunda coluna.

O método iterativo usado anteriormente pode também ser implementado no Maple. Defina a função

> $g := x \rightarrow 2 - \cos(x)$:
 $\text{'g'}(x) = g(x)$

e execute a iteração

> $x[0] := 2.0$;
 for k **from** 1 **to** 10 **do**
 $x[k] := g(x[k-1])$;
 od;
 unassign('x') ;

▼ Exercícios- Capítulo 10

Nos exercícios 10.1 - 10.16, traçar o gráfico do par de funções dadas no mesmo conjunto de eixos.

10.1. $\sin(x)$ e $4 \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$

10.2. $\sin(x)$ e $-2 \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$

10.3. $\sin(x)$ e $3 \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

10.4. $\sin(x)$ e $-2 \sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$

10.5. $\cos(x)$ e $3 \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

10.6. $\cos(x)$ e $-3 \cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$

10.7. $\cos(x)$ e $-\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$

10.8. $\cos(x)$ e $4 \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

10.9. e^x e e^{2x}

10.10. e^x e $e^{-\frac{x}{2}}$

10.11. e^x e e^{x+1}

10.12. e^x e e^{2-3x}

10.13. $\sinh(x)$ e $\sinh(2x)$

10.14. $\sinh(x)$ e $\sinh(x-1)$

10.15. $\cosh(x)$ e $\cosh(3x)$

10.16. $\cosh(x)$ e $-2 \cosh(1-x)$

10.17. Definir o domínio sobre o qual $\tan(x)$ encontra-se invertida em relação à seção principal da função arco-tangente.

Nos exercícios 10.18 - 10.21, provar as identidades a seguir. *Dica:* Usar as formas exponenciais equivalentes das funções hiperbólicas.

10.18. $\sinh(x+y) = \sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y)$

10.19. $\sinh(x-y) = \sinh(x) \cosh(y) - \cosh(x) \sinh(y)$

10.20. $\cosh(x+y) = \cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y)$

10.21. $\cosh(x-y) = \cosh(x) \cosh(y) - \sinh(x) \sinh(y)$

Nos exercícios 10.22 - 10.27, provar as identidades dadas. *Dica:* Usar as identidades dos exercícios 10.18 - 10.21 e proceder como para as identidades trigonométricas equivalentes, ou simplesmente usar as formas exponenciais equivalentes das funções hiperbólicas.

10.22. $\sinh(2x) = 2 \sinh(x) \cosh(x)$

10.23. $\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x$

10.24. $\cosh(2x) = 2 \cosh^2 x - 1$

10.25. $\cosh(2x) = 1 + 2 \sinh^2 x$

10.26. $\sinh(x) = \sqrt{\frac{\cosh(2x) - 1}{2}}$

10.27. $\cosh(x) = \sqrt{\frac{\cosh(2x) + 1}{2}}$

Nos exercícios 10.28 - 10.33, resolver a equação para x .

10.28. $4e^{-3x} = 7$

10.29. $3e^{2-5x} = 21$

10.30. $5e^{\frac{2}{x}} = 19$

10.31. $3 \ln(4x - 5) = 8$

10.32. $7 \ln(4 - x) = 5$

10.33. $2 \ln(3x + 9) = 13$



